Université des Sciences, de Technologie et de Médecine
Faculté des Sciences et Techniques
Département de Maths et Informatique

Année universitaire : **2014-2015**
Matière : **Algèbre Linéaire 2**
Classe : **MAI S3**

Devoir

Exercice 1

On considère la matrice A associée à l'endomorphisme u de $\mathbb{R}^7$ défini dans la base canonique $\mathcal{B}_0 = (e_1, \cdots, e_7)$ par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer les espaces propres et les espaces caractéristiques de u. En déduire que u n'est pas diagonalisable.
2. Donner une réduite de Jordan D de u et préciser la base $B_1 = (\epsilon_1, \cdots, \epsilon_7)$ dans laquelle $\text{Mat}_{B_1}(u) = D$.

Exercice 2

$\mathbb{K}$ est un corps inclus dans $\mathbb{C}$.
Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension finie n et soit $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E)$.
Montrer que si $f^{70} = 0$, alors $f^n = 0$.

Exercice 3

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n. Soient f et g deux endomorphismes de E.
Montrer que $f \circ g$ et $g \circ f$ ont les mêmes valeurs propres.

Bonne Chance
Professeur : Dr. El Khalil OULD MAOULOUD

Préparation : Mohamed El-Hacen **Ould YOUBBA**

Exercice 1 :

1) Calculons le polynôme caractéristique P_A de A :

Rappel 1

Soit $M \in \mathcal{M}_{n_1,p_1}(\mathbb{K})$, $N \in \mathcal{M}_{n_1,p_2}(\mathbb{K})$ et $P \in \mathcal{M}_{n_2,p_2}(\mathbb{K})$. On note 0 la matrice nulle de n_2 lignes et p_1 colonnes. La matrice :

$$B = \begin{pmatrix} M & N \\ 0 & P \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n_1+n_2,p_1+p_2}(\mathbb{K})$$

est appelée **matrice triangulaire (supérieure) par bloc**. Et on a :

$$\det B = \det M \times \det P.$$

On a :

$$\begin{aligned} P_A(X) &= \det(A - XI_7) \\ &= \left|\begin{array}{cccc|ccc} 1-X & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1-X & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1-X & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -X & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & -X & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -X & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -X \end{array}\right| \\ &= \begin{vmatrix} 1-X & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-X & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1-X & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -X \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} -X & 0 & 0 \\ 0 & -X & 0 \\ 0 & 1 & -X \end{vmatrix} \\ &= \left[(1-X)^3(-X)\right] \times (-X)^3 \\ &= (1-X)^3 X^4. \end{aligned}$$

Donc $\mathrm{Sp}(A) = \{0, 1\}$. Déterminons les espaces propres E_0 et E_1 :

On a :

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \\ y_7 \end{pmatrix} \in E_0 \iff AY = 0 \iff \begin{cases} y_1 + y_7 &= 0 \\ y_2 &= 0 \\ y_2 + y_3 &= 0 \\ y_3 &= 0 \\ 0 &= 0 \\ 0 &= 0 \\ y_6 &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y_2 = y_3 = y_6 = 0 \\ y_7 = -y_1 \end{cases}$$

$$\iff Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ 0 \\ 0 \\ y_4 \\ y_5 \\ 0 \\ -y_1 \end{pmatrix} \iff Y = y_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + y_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y_5 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Donc : $\boxed{E_0 = \text{Vect}\,(W_1, W_2, W_3) \text{ avec : } W_1 = e_1 - e_7,\ W_2 = e_4 \text{ et } W_3 = e_5}$.
Maintenant on a :

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \\ y_7 \end{pmatrix} \in E_0 \iff (A - I_7)\,Y = 0 \iff \begin{cases} y_7 & = 0 \\ 0 & = 0 \\ y_2 & = 0 \\ y_3 - y_4 & = 0 \\ -y_5 & = 0 \\ -y_6 & = 0 \\ y_6 - y_7 & = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y_2 = y_5 = y_6 = y_7 = 0 \\ y_3 = y_4 \end{cases}$$

$$\iff Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ 0 \\ y_3 \\ y_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = y_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Donc : $\boxed{E_1 = \text{Vect}\,(W_5, W_6) \text{ avec : } W_5 = e_1 \text{ et } W_6 = e_3 + e_4}$.
Maintenant déterminons les espaces caractéristiques C_0 et C_1 :
D'abord, on a $\dim C_0 = \text{om}_{P_A}(0) = 4$. Calculons A^2. On trouve :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Et on a :

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \\ y_7 \end{pmatrix} \in \ker A^2 \iff A^2 Y = 0 \iff \begin{cases} y_1 + y_6 + y_7 & = 0 \\ y_2 & = 0 \\ 2y_2 + y_3 & = 0 \\ y_2 + y_3 & = 0 \\ 0 & = 0 \\ 0 & = 0 \\ 0 & = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y_2 = y_3 = 0 \\ y_7 = -y_1 - y_6 \end{cases}$$

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ 0 \\ 0 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \\ -y_1 - y_6 \end{pmatrix} = y_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + y_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y_5 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y_6 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Donc $\ker A^2 = \text{Vect}\,(W_1, W_2, W_3, W_4)$ avec $W_4 = e_6 - e_7$.
Et comme $\ker A^2 \subset \ker A^4 = C_0$ et $\dim \ker A^2 = 4 = \dim C_0$, alors $C_0 = \ker A^2$.
Ainsi : $\boxed{C_0 = \text{Vect}\,(W_1, W_2, W_3, W_4) \text{ avec : } W_4 = e_6 - e_7}$.
Maintenant on a : $\dim C_1 = \text{om}_{P_A}(1) = 3$. Calculons $(A - I_7)^2$. On trouve :

$$(A - I_7)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Et on a :

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \\ y_7 \end{pmatrix} \in \ker (A - I_7)^2 \iff (A - I_7)^2 Y = 0 \iff \begin{cases} y_6 - y_7 & = 0 \\ 0 & = 0 \\ 0 & = 0 \\ y_2 - y_3 + y_4 & = 0 \\ y_5 & = 0 \\ y_6 & = 0 \\ -2y_6 + y_7 & = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y_5 = y_6 = y_7 = 0 \\ y_4 = -y_2 + y_3 \end{cases}$$

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ -y_2 + y_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = y_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Donc : $\ker (A - I_7)^2 = \text{Vect}\,(W_5, W_6, W_7)$ avec $W_7 = e_2 - e_4$.
Et comme $\ker (A - I_7)^2 \subset \ker (A - I_7)^3 = C_1$ et $\dim \ker (A - I_7)^2 = 3 = \dim C_1$, alors $C_1 = \ker (A - I_7)^2$.
Ainsi : $\boxed{C_1 = \text{Vect}\,(W_5, W_6, W_7) \text{ avec } W_7 = e_2 - e_4.}$.
Comme $\dim E_0 = 3 \neq 4 = \text{om}_{P_A}(0)$, alors $\boxed{\text{la matrice } A \text{ n'est pas diagonalisable}}$.
2) Comme le polynôme caractéristique de A est scindé, alors la matrice A admet une réduite de Jordan.
On a

$$\begin{cases} \dim E_0 = 3 \quad \text{et} \quad \dim C_0 = 4 \\ \dim E_1 = 2 \quad \text{et} \quad \dim C_1 = 3 \end{cases},$$

Donc la matrice :

$$D = \begin{pmatrix} \boxed{0} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{0} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

est une réduite de Jordan de u.
Maintenant comme $W_4 \in \ker A^2$, alors $AW_4 \in \ker A$, et donc $AW_4 \in E_0$. Calculons AW_4. On trouve :

$$AW_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -W_1,$$

et donc :

$$A\left(-W_4\right) = W_1. \tag{1}$$

D'autre part comme $W_7 \in \ker\left(A - I_7\right)^2$, alors $AW_7 \in \ker(A - I_7)$ et donc $AW_7 \in E_1$. Calculons $(A - I_7)W_7$. On trouve :

$$(A - I_7)W_7 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = W_6,$$

et donc :

$$AW_7 = W_6 + W_7. \tag{2}$$

Enfin on pose :

$$\epsilon_1 = W_2,\ \epsilon_2 = W_3,\ \epsilon_3 = W_1,\ \epsilon_4 = -W_4, \epsilon_5 = W_5,\ \epsilon_6 = W_6 \text{ et } \epsilon_7 = W_7.$$

On a donc : $(\epsilon_1, \cdots, \epsilon_4)$ est une base de C_0 et $(\epsilon_5, \cdots, \epsilon_7)$ est une base de C_1, et par suite $\mathcal{B}_1 = (\epsilon_1, \cdots, \epsilon_7)$ est une base de $\mathbb{R}^7$.

Et on a :

$$\begin{cases} A\epsilon_1 = AW_2 = 0 & (\text{car } W_2 \in E_0 = \ker A)\,, \\ A\epsilon_2 = AW_3 = 0 & (\text{car } W_3 \in E_0 = \ker A)\,, \\ A\epsilon_3 = AW_1 = 0 & (\text{car } W_1 \in E_0 = \ker A)\,, \\ A\epsilon_4 = A\,(-W_4) = W_1 = \epsilon_3 & (\text{d'après (1) })\,, \\ A\epsilon_5 = AW_5 = W_5 = \epsilon_5 & (\text{car } W_5 \in E_1 = \ker(A - I_7))\,, \\ A\epsilon_6 = AW_6 = W_6 = \epsilon_6 & (\text{car } W_6 \in E_1 = \ker(A - I_7))\,, \\ A\epsilon_7 = AW_7 = W_6 + W_7 = \epsilon_6 + \epsilon_7 & (\text{d'après (2) })\,. \end{cases}$$

Donc la matrice de u dans la base $\mathcal{B}_1$ est :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1}(u) = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&1&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&0&0&1&1 \\ 0&0&0&0&0&0&1 \end{pmatrix} = D.$$

Conclusion :

$$\boxed{\text{la matrice } D = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&1&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&0&0&1&1 \\ 0&0&0&0&0&0&1 \end{pmatrix} \text{ est une réduite de Jordan de } u}\,,$$

et on a : $\boxed{\mathcal{B}_1 = (\epsilon_1, \cdots, \epsilon_7) \text{ est une base de } \mathbb{R}^7 \text{ telle que } \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1}(u) = D}$.

Exercice 2

Rappel 2
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Si Q est un polynôme annulateur de u (c'est-à-dire $Q(u) = 0$), alors :

$$\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(u) \subset \mathrm{Rac}_{\mathbb{K}}(Q),$$

où $\mathrm{Rac}_{\mathbb{K}}(Q)$ désigne l'ensemble des racines de Q (dans $\mathbb{K}$).

Soit $\mathrm{Sp}(f)$ le spectre de f dans $\mathbb{C}$. On note P_f le polynôme caractéristique de f dans $\mathbb{C}$. On pose $Q = X^{70}$. Alors on a $Q(f) = f^{70} = 0$ et donc Q est un polynôme annulateur de f. Et comme 0 est la seule racine de Q, alors :

$$\mathrm{Sp}(f) \subset \{0\}.$$

Or : $\mathrm{Sp}(f)$ est un ensemble non vide car P_f est scindé dans $\mathbb{C}$. Donc :

$$\mathrm{Sp}(f) = \{0\}.$$

Donc :

$$P_f = (-1)^n X^n.$$

Et d'après le **théorème de Cayley-Hamilton**, on a $P_f(f) = 0$ et donc $(-1)^n f^n = 0$.
Ainsi : $\boxed{f^n = 0}$.

Exercice 3

Soit $\mathcal{B}$ une base de E. On pose :

$$A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \text{ et } B = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(g).$$

Donc :

$$AB = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f \circ g) \text{ et } BA = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(g \circ f).$$

Soit λ une valeur propre de $f \circ g$. Il existe donc $x \neq 0$ tel que :

$$f \circ g(x) = \lambda x,$$

ou encore :

$$f\left(g(x)\right) = \lambda x. \tag{3}$$

Ainsi :

$$g \circ f\left(g(x)\right) = g\left(\lambda x\right) = \lambda g(x).$$

Il y a deux cas possibles :

- $g(x) \neq 0$: Dans ce cas : λ est une valeur propre de $g \circ f$.
- $g(x) = 0$: Donc d'après (3) on a :

  $$f(0) = \lambda x,$$

  et par suite $\lambda x = 0$. Et comme $x \neq 0$, alors $\lambda = 0$. Donc 0 est une valeur propre de $f \circ g$ et donc on a :

  $$\det(AB) = 0.$$

  Et on a donc :

  $$\det(BA) = \det(AB) = 0.$$

  Donc 0 est une valeur propre de BA, c'est-à-dire $\lambda = 0$ est une valeur propre de $g \circ f$.

Dans les deux cas :

$$\text{si } \lambda \text{ est une valeur propre de } f \circ g, \text{ alors } \lambda \text{ est une valeur propre de } g \circ f. \tag{4}$$

En posant $h = g$ et $k = f$. On a :

$$\begin{aligned} \lambda \in \text{Sp}(g \circ f) &\Leftrightarrow \lambda \in \text{Sp}(h \circ k) \\ &\Rightarrow \lambda \in \text{Sp}(k \circ h) \qquad \text{(d'après (4))} \\ &\Leftrightarrow \lambda \in \text{Sp}(f \circ g). \end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{f \circ g \text{ et } g \circ f \text{ ont mêmes valeurs propres}}$.

Fin .

GOOD LUCK !

If you find some mistaks or if you have some questions or suggestions you can connect with me on :

ouldyoubba@hotmail.com
facebook.com/ibdaa3.2015